ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 139 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-270-283
УДК 517.911, 517.988, 512.562, 51-7

О свойствах решений дифференциальных систем, моделирующих электрическую активность головного мозга

Анастасия Сергеевна ЛАНИНА[1] **, Елена Александровна ПЛУЖНИКОВА**[1,2]
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2] ФГБУН «Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Исследуется модель типа Хопфилда динамики электрической активности головного мозга, представляющая собой систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq 0.$$

Параметры модели считаются заданными: $\alpha > 0$, $w_{ji} > 0$ при $i \neq j$ и $w_{ii} = 0$, $I_i(t) \geq 0$. Функция активации f_δ (δ — время перехода нейрона в состояние активности) рассмотрена двух типов:

$$\delta = 0 \ \Rightarrow \ f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta; \end{cases} \qquad \delta > 0 \ \Rightarrow \ f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v-\theta), & \theta < v \leq \theta + \delta, \\ 1, & v > \theta + \delta. \end{cases}$$

В случае $\delta > 0$ (функция f_δ непрерывна) решение задачи Коши для рассматриваемой системы существует, единственно и является неотрицательным при неотрицательных начальных значениях. В случае $\delta = 0$ (функция f_0 разрывна в точке θ) показано, что во множестве решений задачи Коши есть наибольшее и наименьшее решения, получены оценки решений и приведен пример системы, для которой задача Коши имеет бесконечное множество решений. В этом исследовании используются методы анализа отображений частично упорядоченных пространств.

Также исследуется уточненная модель Хопфилда, в которой учитывается время движения электрического импульса от одного нейрона к другому, и поэтому модель представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием. Для такой системы и в случае непрерывной, и в случае разрывной функции активации показано, что задача Коши однозначно разрешима, получены оценки решения и описан алгоритм аналитического нахождения решения.

Ключевые слова: нейронная сеть, дифференциальное уравнение с разрывной правой частью, запаздывание, задача Коши, существование решения, верхнее и нижнее решения, отображения частично упорядоченных пространств

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00863, https://rscf.ru/project/22-21-00863/).

Для цитирования: *Ланина А.С., Плужникова Е.А.* О свойствах решений дифференциальных систем, моделирующих электрическую активность головного мозга // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 270–283. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-270-283.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-270-283

On properties of solutions to differential systems modeling the electrical activity of the brain

Anastasia S. LANINA[1], **Elena A. PLUZHNIKOVA**[1,2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The Hopfield-type model of the dynamics of the electrical activity of the brain, which is a system of differential equations of the form

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta(v_j) + I_i(t), \quad i=\overline{1,n}, \quad t \geq 0,$$

is investigated. The model parameters are assumed to be given: $\alpha>0$, $w_{ji}>0$ for $i\neq j$ and $w_{ii}=0$, $I_i(t)\geq 0$. The activation function f_δ (δ is the time of the neuron transition to the state of activity) of two types is considered:

$$\delta = 0 \;\Rightarrow\; f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta; \end{cases} \qquad \delta > 0 \;\Rightarrow\; f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v-\theta), & \theta < v \leq \theta+\delta, \\ 1, & v > \theta+\delta. \end{cases}$$

In the case of $\delta>0$ (the function f_δ is continuous), the solution of the Cauchy problem for the system under consideration exists, is unique, and is non-negative for non-negative initial values. In the case of $\delta=0$ (the function f_0 is discontinuous at the point θ), it is shown that the set of solutions of the Cauchy problem has the largest and the smallest solutions, estimates for the solutions are obtained, and an example of a system for which the Cauchy problem has an infinite number of solutions is given. In this study, methods of analysis of mappings acting in partially ordered spaces are used.

An improved Hopfield model is also investigated. It takes into account the time of movement of an electrical impulse from one neuron to another, and therefore such a model is represented by a system of differential equations with delay. For such a system, both in the case of continuous and in the case of discontinuous activation function, it is shown that the Cauchy problem is uniquely solvable, estimates for the solution are obtained, and an algorithm for analytical finding of solution is described.

Keywords: neural network, differential equation with discontinuous right-hand side, delay, Cauchy problem, existence of solution, upper and lower solutions, mappings of partially ordered spaces

Acknowledgements: The study was supported by the Russian Science Foundation grant (no. 22-21-00863, https://rscf.ru/en/project/22-21-00863/).

Mathematics Subject Classification: 92B20, 34A12, 34A36, 47J99.

For citation: Lanina A.S., Pluzhnikova E.A. O svoystvakh resheniy differentsial'nykh sistem, modeliruyushchikh elektricheskuyu aktivnost' golovnogo mozga [On properties of solutions to differential systems modeling the electrical activity of the brain]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 270–283. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-270-283. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Изучение структуры и функционирования головного мозга, оставаясь одной из важнейших медицинских проблем, в последние десятилетия стало актуальным для ряда технических наук, для создания новых технологий. Расширяется инструментарий исследований, широко используются математические методы, большое количество работ посвящается математическим моделям работы мозга, описывающим динамику его электрической активности. Наиболее адекватно отражающими такие процессы считаются модели на основе нейронных полей и нейронных сетей. Одной из базовых сетевых моделей, идеи построения которой используются в более точных и, соответственно, более сложных современных моделях, является модель Дж. Дж. Хопфилда (J. J. Hopfield, 1982, [1]). Рассмотрим ее.

Структурно-функциональной единицей головного мозга является нейрон — электрически возбудимая клетка, осуществляющая прием, обработку, хранение и передачу электрических импульсов. Нейрон состоит из сомы, дендритов и аксона. Дендриты проводят к телу нейрона электрические импульсы, сома служит для формирования и распространения электрического потенциала, который впоследствии по аксону передается другим нейронам (см., например, [2, с. 222–224]).

Будем использовать следующие обозначения: n — количество нейронов в сети, $v_i(t)$ — значение электрической активности i-го нейрона в момент времени $t \in [0,\infty)$, $I_i(t)$ — внешнее воздействие, оказываемое на i-й нейрон в момент времени t, w_{ji} — сила связи j-го нейрона с i-м нейроном. Для введенных величин выполнены соотношения: $v_i(t) \geq 0$ и $I_i(t) \geq 0$ на $[0,\infty)$, $w_{ii}=0$ и $w_{ji}=w_{ij}>0$ при всех $i,j=\overline{1,n}$, $i \neq j$. Предположим, что для любого «одиночного нейрона» скорость изменения уровня электрической активности пропорциональна с некоторым отрицательным коэффициентом $-\alpha$, $\alpha>0$, уровню его электрической активности. Связь активации нейрона с уровнем его электрической активности определяет «функция активации» $f_\delta : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, которая в модели Хопфилда задается формулой

$$f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v-\theta), & \theta < v \leq \theta+\delta, \\ 1, & v > \theta+\delta, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $\theta > 0$ — некоторое пороговое значение, начиная с которого за время $\delta > 0$ нейрон переходит из состояния покоя в состояние активности. В перечисленных предположениях моделью электрической активности головного мозга является следующая система дифференциальных уравнений (см. [1,3])

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta(v_j) + I_i(t), \quad i=\overline{1,n}. \tag{0.2}$$

Функции $I_i(\cdot)$ будем предполагать измеримыми и суммируемыми на каждом конечном отрезке из $[0,\infty)$. Соответственно, решением системы (0.2) будет набор $(v_1,\ldots,v_n)$ абсолютно непрерывных на произвольном конечном отрезке $[0,T]$ функций, удовлетворяющий этому уравнению при п. в. t.

Задача Коши для системы (0.2) с начальными условиями

$$v_i(0) = v_i^0, \quad i=\overline{1,n}, \tag{0.3}$$

очевидно, однозначно разрешима. Приведем соответствующее утверждение, сформулированное в тезисах [4].

Теорема 0.1. *Для любого* $T > 0$ *система дифференциальных уравнений* (0.2) *с начальными условиями* (0.3) *имеет единственное определенное на отрезке* $[0, T]$ *решение* $(v_1, \ldots, v_n)$, *причем, если* $v_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, *то* $v_i(t) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, *при всех* $t \in [0, T]$.

Доказательство однозначной разрешимости задачи (0.2), (0.3) следует из того, что функция $f_\delta(v_j)$ удовлетворяет условию Липшица с константой δ^{-1}, и поэтому функции

$$F_i(v_1, \ldots, v_n) = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

определяющие правые части системы (0.2), являются липшицевыми по каждой переменной $v_1, \ldots, v_n$.

Чтобы показать, что все компоненты решения — функции $v_i(\cdot)$ неотрицательные, достаточно, записав задачу (0.2), (0.3) в виде эквивалентной системы интегральных уравнений Вольтерры

$$v_i(t) = v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \Big(\sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta(v_j(s)) + I_i(s) \Big) ds, \quad i = \overline{1, n},$$

заметить, что ее правая часть неотрицательна.

Так как время δ активации нейрона мало и его практически невозможно точно измерить, некоторые авторы заменяют непрерывную функцию f_δ разрывной в точке θ функцией Хевисайда

$$f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta, \end{cases}$$

Отметим, что для каждого v при $\delta \to 0$ имеет место сходимость $f_\delta(v) \to f_0(v)$. Замена непрерывной «функции активации» функцией Хевисайда упрощает численное исследование модели, позволяет получить для некоторых классов внешних воздействий решения в явном виде (см., например, [5–7]). Однако, в цитируемых и ряде других работ, использующих такую функцию активации, не рассматривалась зависимость решения задачи (0.2), (0.3) от δ при $\delta \to 0$, и более того, даже не устанавливалась разрешимость «предельной задачи» со значением $\delta = 0$. Этот «пробел» в обосновании использования в модели нейросети разрывной функции активации — следствие неприменимости результатов классической теории дифференциальных уравнений. В работах [8–11] уравнение нейронного поля в случае $\delta = 0$ сводится к включению заменой функции f_0 многозначным отображением таким, что $f_0(\theta) = [0, 1]$. В такой трактовке модели была установлена непрерывная зависимость множества решений задачи Коши при переходе от непрерывной функции активации к разрывной. Безусловно, замена уравнения (0.2) включением приводит к появлению дополнительных решений, которые могут не соответствовать исследуемым процессам активности мозга.

В данной работе мы рассмотрим систему (0.2) дифференциальных уравнений с разрывной функцией f_0, не сводя уравнения к включениям. Вместо результатов анализа отображений в метрических пространствах, большинство из которых использует непрерывность, мы применим методы анализа отображений частично упорядоченных пространств. Это оказывается возможным, так задача Коши для этой системы приводится к уравнению неподвижной точки монотонного интегрального оператора в пространстве суммируемых функций. Близкие подходы к исследованию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью применялись Е. С. Жуковским в [12, с. 16,17], а в недавних работах [13–15] такие подходы были распространены на неявные дифференциальные и интегральные уравнения.

Также мы исследуем уточненную модель Хопфилда, в которой учитывается время $\tau_{ji} > 0$ движения электрического импульса от j-го нейрона к i-му, и поэтому такая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием. Мы рассматриваем эту систему и в случае непрерывной, и в случае разрывной функции активации, т. е. для времени активации $\delta \geq 0$.

Статья состоит из трех параграфов. Сначала в параграфе 1. приводятся необходимые понятия и результаты анализа отображений в частично упорядоченных пространствах. Параграф 2. посвящен модели электрической активности мозга типа модели Хопфилда (0.2) в предположении, что активация нейрона происходит мгновенно, $\delta = 0$. Здесь доказывается теорема о разрешимости задачи Коши. Показано, что единственности решения задачи Коши нет даже для простейших систем двух уравнений, но в множестве решений гарантируется существование нижнего и верхнего решений. Также установлено, что для нижнего (верхнего) решения v значение дифференциального оператора $\dot{v} + \alpha v$ является наименьшим (наибольшим) элементом в множестве значений данного оператора на решениях рассматриваемой задачи. В параграфе 3. рассмотрена модель электрической активности мозга без ограничений на время активации нейрона и с учетом того, что электрический импульс от одного нейрона к другому распространяется за положительное время. Показано, что задача Коши для соответствующей системы дифференциальных уравнений с запаздыванием однозначно разрешима. Также описан алгоритм аналитического нахождения решения этой задачи.

1. Отображения частично упорядоченных пространств

Приведем некоторые сведения о частично упорядоченных пространствах, используемые в работе (подробнее см., например, [16, гл. I, § 4] и [17, § 1]).

Пусть на множестве $X \neq \emptyset$ задано отношение нестрогого порядка $\leq$ (т. е. рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение). Эту алгебраическую систему называют *частично упорядоченным пространством* и обозначают $(X, \leq)$. Вместо $x \leq u$ можем писать $u \geq x$, а в случае $x \leq u$ и $x \neq u$ можем писать $x < u$ или $u > x$. Для любых $\underline{x}, \overline{x} \in X$ определим *отрезок* — множество $[\underline{x}, \overline{x}] = \big\{x \in X : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\big\}$ (если $\overline{x} \not\leq \underline{x}$ будем считать, что $[\underline{x}, \overline{x}] = \emptyset$). Подмножество $S \subset X$ называют *цепью* (или линейно упорядоченным), если для любых его двух элементов $x, u \in S$ выполнено $x \leq u$ или $u \leq x$. Цепь называют *максимальной*, если она не является собственным подмножеством никакой другой цепи в этом пространстве. *Нижней границей множества* $U \subset X$ называют элемент $v \in X$ такой, что $v \leq u$ для любого $u \in U$, а *точной нижней границей* — наибольшую из нижних границ — элемент $w \in X$, для которого, во-первых,

$$\forall u \in U \quad w \leq u,$$

и во-вторых,

$$\forall u \in U \ \forall v \in X \quad v \leq x \ \Rightarrow \ v \leq w.$$

Пространство $(X, \leq)$ называем s*-полным* (*снизу*), если любая цепь, принадлежащая этому пространству, имеет точную нижнюю границу. Если точная нижняя граница есть у произвольного множества из X, то пространство называют *полным* (*снизу*). Пространство $(X, \leq)$ называется (*нижней*) *полурешеткой*, если для множества из любых двух его элементов существует точная нижняя граница. Далее, употребляя эти термины, будем опускать слова «снизу», «нижняя», если это не вызовет разночтений.

Приведем примеры частично упорядоченных пространств, используемых далее в исследовании системы (0.2) с разрывной функцией f_0.

Пример 1.1. На множестве $\mathbb{R}^n$ векторов с вещественными компонентами определим покоординатный порядок, т. е. для $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ неравенство $x \leq u$ означает, что $x_i \leq u_i$ $i = \overline{1, n}$. Частично упорядоченное пространство $(\mathbb{R}^n, \leq)$ является полурешеткой (и даже *решеткой*: любое его двухэлементное подмножество обладает и инфимумом и супремумом), но не является s-полным (и конечно, полным). А при этом полнотой обладает его подпространство $(\mathbb{R}^n_+, \leq)$, содержащее векторы с неотрицательными компонентами. Действительно, для любого множества $U \subset \mathbb{R}^n_+$ числовое множество $U_i \subset \mathbb{R}_+$ i-х компонент векторов из U является полным, существует $u_i = \inf U_i$, $i = \overline{1, n}$, а вектор $u = (u_1, \ldots, u_n)$ является точной нижней границей множества U.

Пример 1.2. Пусть $T > 0$. Рассмотрим пространство L^n измеримых и суммируемых (по Лебегу) функций $y \colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ с «естественным» порядком: для функций $y = (y_1, \ldots, y_n) \in L^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in L^n$ полагаем выполненным неравенство $y \leq z$, если $y_i(t) \leq z_i(t)$ при п.в. $t \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$. Это частично упорядоченное пространство — полурешетка (и решетка), но не является s-полным. Свойством полноты будет обладать подпространство $L^n_+ \subset L^n$ неотрицательных функций $y \colon [0, T] \to \mathbb{R}^n_+$. Покажем это. Для произвольного множества $U \subset L^n_+$ определим множество $U_i \subset L_+$ функций, являющихся i-ми компонентами функций из U. Так как конус неотрицательных функций в L_+ является сильно миниэдральным (см., например, [18, с. 257]), существует $u_i = \inf U_i$, $i = \overline{1, n}$. Теперь несложно проверить, что функция $u = (u_1, \ldots, u_n)$ является точной нижней границей множества U. Аналогично легко проверяется, что любых $\underline{z}, \overline{z} \in L^n$, $\underline{z} \leq \overline{z}$, отрезок $[\underline{z}, \overline{z}]$ является полным пространством.

Пример 1.3. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с отношением делимости является полным частично упорядоченным пространством: точной нижней границей любого множества $U \subset \mathbb{N}$ является наибольший общий делитель всех чисел из U. Подпространство $\mathbb{N}_{10} = \{10, 11, \ldots\}$ полного частично упорядоченного пространства $(\mathbb{N}, \vdots)$ уже не является полным, и даже не является полурешеткой: двухэлементное множество $\{10, 12\}$ не имеет в $\mathbb{N}_{10}$ нижней границы. В то же время пространство $(\mathbb{N}_{10}, \vdots)$ является s-полным.

Пусть задан оператор $\Psi : X \to X$. Сформулируем условия существования у этого оператора *неподвижной точки* — элемента $x \in X$, удовлетворяющего уравнению

$$x = \Psi(x).$$

Напомним, что оператор Ψ называется *монотонным* (*изотонным*), если для любых элементов $x, u \in X$ таких, что $x \leq u$, выполнено отношение $\Psi(x) \leq \Psi(u)$.

Следующее утверждение, обычно формулируемое при несколько более обременительном предположении полноты пространства $(X, \leq)$, называют *теоремой Биркгофа–Тарского* (см. [19, с. 266]).

Теорема 1.1. *Пусть существуют элементы* $\underline{x}, \overline{x} \in X$ *такие, что*

$$\underline{x} \le \Psi(\underline{x}), \quad \overline{x} \ge \Psi(\overline{x}). \tag{1.1}$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) пространство $U = [\underline{x}, \overline{x}]$ *является* s*-полным (относительно индуцированного порядка* $\le$ *),*

2) сужение оператора Ψ *на пространство* $(U, \le)$ *является монотонным.*
Тогда существует неподвижная точка $x \in U$ *оператора* Ψ.

З а м е ч а н и е 1.1. Поскольку в теореме 1.1 вместо условия полноты пространства $(U, \le)$ используется условие s-полноты, для доказательства этого утверждения приходится использовать теорему Хаусдорфа о максимальной цепи (см., например, [16, с. 40]). Соответственно, доказательство теоремы 1.1 отличается от [19, с. 266] и поэтому приводится ниже.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого элемента $x \in U$ вследствие монотонности сужения оператора Ψ на $(U, \le)$ из неравенств (1.1) получаем

$$\underline{x} \le \Psi(\underline{x}) \le \Psi(x) \le \Psi(\overline{x}) \le \overline{x},$$

т. е. $\Psi(U) \subset U$. Определим подмножество $U_0 \subset U$ соотношением

$$U_0 = \{x \in U : x \ge \Psi(x)\} \tag{1.2}$$

(с индуцированным отношением порядка $\le$). Очевидно, $\overline{x} \in U_0$, таким образом, $U_0 \ne \emptyset$.

Согласно теореме Хаусдорфа о максимальной цепи, в частично упорядоченном множестве U_0 существует максимальная цепь S (и очевидно, эта цепь содержит элемент $\overline{x}$). Из условия 1) следует, что существует точная нижняя граница цепи S, обозначим ее через $\xi = \inf S$. Имеем $\underline{x} \le \xi \le \overline{x}$, $\xi \in U$. Для любого $x \in S$ выполнено $\Psi(\xi) \le \Psi(x) \le x$, т. е. $\Psi(\xi)$ — нижняя граница цепи S. Согласно определению точной нижней границы имеем

$$\Psi(\xi) \le \xi. \tag{1.3}$$

Это неравенство, согласно определению (1.2), множества U_0 означает, что $\xi \in U_0$, и таким образом $\xi \in S$. Но $\inf S = \xi$, поэтому

$$\Psi(\xi) \ge \xi. \tag{1.4}$$

Теперь из неравенств (1.3) и (1.4) следует, что $\xi = \Psi(\xi)$. □

Определенная в доказательстве теоремы 1.1 неподвижная точка ξ оператора Ψ является минимальным элементом в множестве всех $\mathrm{Fix}(\Psi, U)$ неподвижных точек, принадлежащих отрезку U. Но этот элемент без дополнительных предположений не обязательно наименьший в этом множестве. Сформулируем условия существования наименьшего элемента в множестве $\mathrm{Fix}(\Psi, U)$.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и, кроме того, отрезок* $(U, \le)$ *является нижней полурешеткой. Тогда в множестве* $\mathrm{Fix}(\Psi, U)$ *существует наименьший элемент.*

Доказательство. Покажем, что требуемым наименьшим элементом является неподвижная точка ξ оператора Ψ, определенная при доказательстве теоремы 1.1. Этот элемент — точная нижняя граница максимальной в $(U, \leq)$ цепи S.

Если элемент ξ не является наименьшим в множестве $\mathrm{Fix}(\Psi, U)$ неподвижных точек, то для некоторого элемента $\eta \in \mathrm{Fix}(\Psi, U)$ выполнено $\xi \not\leq \eta$. В нижней полурешетке U существует $z = \inf\{\xi, \eta\} \in U$, и для этого элемента выполнены неравенства $z \leq \eta$, $z \leq \xi$ и $z \neq \xi$. Вследствие монотонности оператора Ψ получим

$$\Psi(z) \leq \Psi(\xi) = \xi, \quad \Psi(z) \leq \Psi(\eta) = \eta.$$

Из этих неравенств получим $\Psi(z) \leq \inf\{\xi, \eta\} = z < \xi$. Итак, $z \in U$, а множество $\{z\} \cup S$ является цепью, что противоречит максимальности цепи $S \subset U$. Таким образом, ξ — наименьший в $\mathrm{Fix}(\Psi, U)$ элемент. □

2. Модель нейронного поля с разрывной функцией активации

Рассмотрим модель электрической активности головного мозга типа модели Хопфилда в предположении, что активация нейрона происходит мгновенно, $\delta = 0$. Эта модель записывается в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_0(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.1}$$

Нас будут интересовать условия разрешимости задачи Коши для уравнения (2.1) и структура множества решений. Единственности решения задачи Коши даже для простейших уравнений вида (2.1) нет, что показывает следующий пример.

Пример 2.1. Пусть в модели (2.1) $n = 2$, $\alpha = 1$, $\theta = 1$, $w_{12} = w_{21} = 1$, $I_i(t) \equiv 1$. Тогда (2.1) представляет собой систему

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -v_1 + f_0(v_2) + 1, \\ \dot{v}_2 = -v_2 + f_0(v_1) + 1, \end{cases} \quad t \geq 0, \ \text{ где } \ f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq 1, \\ 1, & v > 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Решения этой системы определяются следующим образом:

$$v_1(t) = \begin{cases} Ce^{-t} + 1, & \text{при } t \text{ таких, что } v_2(t) \leq 1, \\ Ce^{-t} + 2, & \text{при } t \text{ таких, что } v_2(t) > 1, \end{cases} \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Задача Коши (2.2), (0.3) с начальными значениями $v_1^0 = v_2^0 = 1$ имеет бесконечное множество абсолютно непрерывных решений, определяемых формулой

$$v_1(t) = v_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [0, t_0], \\ 2 - e^{t_0 - t}, & \text{при } t > t_0, \end{cases} \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Как отмечалось во введении, отсутствие непрерывности функции f_0 не позволяет применять к системе (2.1) результаты анализа отображений метрических пространств. Запишем задачу Коши (2.1), (0.3) в виде такого эквивалентного интегрального уравнения в полном частично упорядоченном пространстве L_+^n, к которому применимы теорема 1.1 и предложение 1.1.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\dot{v}_i + \alpha v_i = z_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.3}$$

с начальным условием (0.3). Для любой функции $z = (z_1, \ldots, z_n) \in L^n$ задача (2.3), (0.3) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $v = (v_1, \ldots, v_n)$, определяемое формулой

$$v_i(t) = v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_i(s)\, ds, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.4}$$

Используя определенную этой формулой подстановку, запишем задачу (2.1), (0.3) в виде системы интегральных уравнений

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_0\Big(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_j(s)\, ds\Big) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.5}$$

относительно неизвестной функции $z = (z_1, \ldots, z_n) \in L^n$. Если эта система разрешима, то по ее решению z формулой (2.4) определяется решение задачи (2.1), (0.3).

Заметим, что для любой измеримой функции v композиция $y = f_0(v)$ измерима. Действительно, функция y принимает только два значения 0 и 1, а множество Лебега $\{t : y(t) = 0\} = \{t : v(t) \le 1\}$ является измеримым. Таким образом, для любого $z = (z_1, \ldots, z_n) \in L^n$ правая часть уравнения (2.5) представляет собой сумму ограниченной измеримой неотрицательной функции $\sum_{j=1}^n w_{ji} f_0\Big(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_j(s)\, ds\Big)$ и суммируемой на каждом конечном отрезке неотрицательной функции $I_i(t)$. Поэтому в уравнении (2.5), рассматриваемом на произвольном отрезке «времени» $[0, T]$, правая часть — это суммируемая неотрицательная функция. Итак, задача Коши (2.1), (0.3) представлена в виде уравнения неподвижной точки оператора $\Psi : L_+^n \to L_+^n$, $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$, определяемого соотношением

$$\forall z \in L_+^n \quad \Psi_i(z)(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_0\Big(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_j(s)\, ds\Big) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.6}$$

З а м е ч а н и е 2.1. Из соотношения (2.4), устанавливающего равносильность задачи (2.1), (0.3) и уравнения (2.5), прямо следует, что в случае неотрицательных начальных значений $v^0 = (v_1^0, \ldots, v_n^0) \in \mathbb{R}_+^n$, если решение задачи Коши существует, то его компоненты — неотрицательные функции. Действительно, в соотношении (2.4) функция z_i — решение уравнения (2.5), и поэтому $z_i \in L_+^n$.

Теорема 2.1. *Задача Коши для системы дифференциальных уравнений* (2.1) *с начальными условиями* (0.3) *при любом* $T > 0$ *имеет определенное на отрезке* $[0, T]$ *абсолютно непрерывное решение. Компоненты любого решения* $v = (v_1, \ldots, v_n) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *при любом* $i = \overline{1, n}$ *удовлетворяют на* $[0, T]$ *неравенствам*

$$I_i(t) \le \dot{v}_i(t) + \alpha v_i(t) \le \sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t), \tag{2.7}$$

а следовательно, и неравенствам

$$v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} I(s) ds \le v_i(t) \le v_i(t) e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} I(s) ds + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \sum_{j=1}^n w_{ji}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Определим оператор $\Psi : L^n_+ \to L^n_+,$ соотношением (2.6). Для любого $z \in L^n_+$ при всех $i = \overline{1,n}$ имеем

$$I_i(t) \le \Psi_i(z)(t) \le \sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t), \quad t \in [0,T].$$

Поэтому, в случае существования решения v задачи (2.1), (0.3), оно должно удовлетворять неравенствам (2.7).

Проверим условия теоремы 1.1 для оператора $\Psi : L^n_+ \to L^n_+$. Прежде всего отметим, что любой отрезок в пространстве $(L^n_+, \le)$ является полным и, тем более s-полным (см. пример 1.2). Далее, оператор $\Psi : L^n_+ \to L^n_+,$ очевидно, монотонный. И наконец, для функций $\underline{z}(t) = \big(I_i(t)\big)_{i=\overline{1,n}},$ $\overline{z}(t) = \big(\sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t)\big)_{i=\overline{1,n}}$ справедливы соотношения

$$\Psi(\underline{z})(t) = \Big(\sum_{j=1}^n w_{ji} f_0\big(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} I_j(s)\,ds\big) + I_i(t)\Big)_{i=\overline{1,n}} \ge \big(I_i(t)\big)_{i=\overline{1,n}} = \underline{z}(t),$$

$$\Psi(\overline{z})(t) = \Big(\sum_{j=1}^n w_{ji} f_0\big(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \overline{z}_j(s)\,ds\big) + I_i(t)\Big)_{i=\overline{1,n}} \le \Big(\sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t)\Big)_{i=\overline{1,n}} = \overline{z}(t).$$

Таким образом, все условия теоремы 1.1 выполнены, и согласно этой теореме система интегральных уравнений (2.5) имеет решение $z \in L^n,$ удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{z} \le z \le \overline{z}. \tag{2.9}$$

Следовательно, задача Коши (2.1), (0.3) также разрешима. А из неравенств (2.9) в силу соотношений (2.3), (2.4) следуют требуемые оценки (2.7), (2.8) ее решения v. □

Обозначим через SCP_T — множество определенных на $[0,T]$ абсолютно непрерывных решений задачи Коши (2.1), (0.3) (согласно теореме 2.1, $\mathrm{SCP}_T \ne \emptyset$), и определим на нем дифференциальный оператор $\mathfrak{D}$ следующим соотношением

$$v = (v_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathrm{SCP}_T \ \mapsto\ \mathfrak{D}v = \big(\dot{v}_i + \alpha v_i\big)_{i=\overline{1,n}} \in L^n_+.$$

Для этого оператора полный образ $\mathfrak{D}(\mathrm{SCP}_T) \subset L^n_+$ совпадает с множеством определенных на $[0,T]$ решений системы (2.5) интегральных уравнений. Полное частично упорядоченное пространство $(L^n_+, \le)$ является полурешеткой, что позволяет применить предложение 1.1 к исследованию свойств множества $\mathfrak{D}(\mathrm{SCP}_T)$. Таким образом получаем следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Для любого $T > 0$ в множестве $\mathfrak{D}(\mathrm{SCP}_T) \subset L^n_+$ существует наименьший элемент. Соответственно, в множестве SCP_T абсолютно непрерывных решений задачи Коши (2.1), (0.3) существует нижнее решение $\widetilde{v} \in \mathrm{SCP}_T,$ т. е. $\widetilde{v}(t) \le v(t)$ $\forall t \in [0,T]$ для любого решения $v \in \mathrm{SCP}_T$.*

Доказательство. Из предложения 1.1 прямо вытекает существование наименьшего элемента $\widetilde{z}$ в множестве $\mathfrak{D}(\mathrm{SCP}_T) \subset L^n_+$. Соответствующее решение $\widetilde{v} \in \mathrm{SCP}_T$ задачи Коши (2.1), (0.3), определяемое формулой

$$\widetilde{v}_i(t) = v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \widetilde{z}_i(s)\,ds, \quad i = \overline{1,n},$$

очевидно, будет нижним. □

З а м е ч а н и е 2.2. Имеет место аналогичное предложению 2.1 утверждение о существовании в множестве $\mathfrak{D}(\mathrm{SCP}_T) \subset L_+^n$ наибольшего элемента. Для его доказательства следует заметить, что для любых функций $\underline{z}, \overline{z} \in L^n$, $\underline{z} \le \overline{z}$ отрезок $[\underline{z}, \overline{z}]$ является еще полным сверху частично упорядоченным пространством, следовательно, и верхней полурешеткой.

3. Модель нейронного поля с запаздыванием

Рассмотрим модель электрической активности головного мозга типа модели Хопфилда, в которой учитывается, что электрический импульс от j-го нейрона к i-му распространяется не мгновенно, а за некоторое положительное время τ_{ji}. Для описания такого процесса будем использовать систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{gathered}\dot{v}_i(t) = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta(v_j(t-\tau_{ji})) + I_i(t), \quad t \ge 0, \\ v_i(t) = \vartheta_i(t), \ \text{ если } \ t < 0,\end{gathered} \qquad i = \overline{1,n}, \tag{3.1}$$

где «предыстория» — набор функций $\vartheta_i : [-\widetilde{\tau}_i, 0) \to \mathbb{R}_+$, $\widetilde{\tau}_i = \max_{k=\overline{1,n}} \tau_{ik}$, $i = \overline{1,n}$, считается заданным. Подчеркнем, что в формулируемых ниже утверждениях о системе (3.1) не предполагаются какие-либо ограничения на время активации нейрона, т. е. возможны обе ситуации: и $\delta > 0$ (что соответствует непрерывной функции f_δ), и $\delta = 0$ (что соответствует разрывной функции f_0).

Теорема 3.1. *Для любого значения параметра $\delta \ge 0$ при любом $T > 0$ задача Коши для системы (3.1) с начальными условиями (0.3) имеет единственное определенное на отрезке $[0, T]$ абсолютно непрерывное решение $v = (v_1, \ldots, v_n)$, и это решение удовлетворяет неравенствам (2.7) и (2.8).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим отображение Δ_{ik}, $i, k \in \overline{1,n}$, сопоставляющее любой скалярной функции $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ функцию

$$\Delta_{ik}(u)(t) = \begin{cases} \vartheta_i(t - \tau_{ik}), & t \in [0, \tau_{ik}), \\ u(t - \tau_{ik}), & t \in [\tau_{ik}, T]. \end{cases}$$

Используя замену (2.3), (2.4) неизвестной абсолютно непрерывной функции v суммируемой функцией z, сведем задачу (3.1), (0.3) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered} z_i(t) = \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big(\Delta_{ji} \mathcal{J}_j(z_j)(t)\big) + I_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \\ \text{где } \ \mathcal{J}_i(z_i)(t) = v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_i(s)\, ds, \quad j = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Исследуемая задача Коши (3.1), (0.3) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима система (3.2), а по решению $z = (z_1, \ldots, z_n)$ этой системы формулой (2.4) определяется решение задачи (3.1), (0.3).

Определим оператор $\Psi : L_+^n \to L_+^n$, сопоставляющий функции $z \in L_+^n$ функцию $\Psi(z) = (\Psi_1(z), \ldots, \Psi_n(z))$ такую, что

$$\Psi_i(z) = \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big(\Delta_{ji} \mathcal{J}_j(z_j)\big) + I_i, \ \text{ где } \ \mathcal{J}_i(z_i)(t) = v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z(s)\, ds, \quad i = \overline{1,n}.$$

Этот оператор является монотонным. Таким образом, существование решения системы (3.2) можно установить рассуждениями, аналогичными использовавшимся в доказательстве теоремы 2.1, и основанными на теореме 1.1 Биркгофа–Тарского о неподвижной точке монотонного оператора в частично упорядоченном пространстве. Однако, такой подход не позволяет установить единственность решения. Поэтому здесь мы применим иной метод доказательства, лишенный этого недостатка и, более того, являющийся конструктивным, т. е. решение системы (3.2) будет найдено в явном виде.

Обозначим

$$\tau = \min_{i,j}\{\tau_{ij}\}.$$

Предлагаемый итерационный алгоритм нахождения решения системы (3.2) использует следующее свойство τ-вольтерровости оператора Ψ: значения функции $\Psi(z)(t)$ при $t \in [0,\tau]$ известны и не зависят от z, а если $t \in (\tau, T]$, то значения функции $\Psi(z)(t)$ определяются значениями $z(t)$ на $[0, t-\tau]$ (подробнее об уравнениях с τ-вольтерровыми операторами, свойствах решений и примененном здесь алгоритме их нахождения см., например, в [20, § 4]).

При $t \in [0,\tau]$ правая часть системы (3.2) равна известной функции

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big(\vartheta_j(t-\tau_{ji})\big) + I_i(t),$$

и поэтому единственным решением системы (3.2) на отрезке $[0,\tau]$ является

$$z_i^1(t) = \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big(\vartheta_j(t-\tau_{ji})\big) + I_i(t), \quad t \in [0,\tau], \quad i = \overline{1,n}.$$

Доопределим функцию z_i^1 на весь отрезок $[0,T]$, сохраняя ее суммируемость (например, значением 0 при $t \in (\tau, T]$), и обозначим полученную функцию через $\widetilde{z}_i^1$. Далее, используя эту функцию, получим, что на промежутке $(\tau, 2\tau]$ решением является

$$z_i^2(t) = \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big(\Delta_{ji}\mathcal{J}_j(\widetilde{z}_j^1)(t)\big) + I_i(t), \quad t \in (\tau, 2\tau], \quad i = \overline{1,n}.$$

Обозначим

$$\widetilde{z}_i^2(t) = \begin{cases} z_i^1(t), & t \in [0,\tau], \\ z_i^2(t), & t \in (\tau, 2\tau], \\ 0, & t \in (2\tau, T], \end{cases}$$

и используя эту функцию, аналогично найдем решение на промежутке $(2\tau, 3\tau]$. Продолжая описанные построения, за конечное число шагов m (равное целой части числа T/τ) будет получено определенное на всем отрезке $[0,T]$ единственное решение системы (3.2).

Для построенного решения имеют место оценки (2.7) и (2.8), так как правая часть системы (3.2) удовлетворяет неравенствам

$$I_i(t) \le \sum_{j=1}^{n} w_{ji} f_\delta\big(\Delta_{ji}\mathcal{J}_j(z_j)(t)\big) + I_i(t) \le \sum_{j=1}^{n} w_{ji} + I_i(t), \quad t \in [0,T], \quad i = \overline{1,n},$$

при любом $z = (z_1, \ldots, z_n) \in L^n$. □

References

[1] J. J. Hopfield, “Neural networks and physical systems with emergent collective computational properties”, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **79** (1982), 2554–2558.

[2] В. Л. Быков, *Цитология и общая гистология*, Сотис, Санкт-Петербург, 2018. [V. L. Bykov, *Cytology and General Histology*, Sothis, St. Petersburg, 2018 (In Russian)].

[3] P. Van den Driesche, X. Zou, “Global attractivity in delayed Hopfield neural network models”, *SIAM J. Appl. Math.*, **58** (1998), 1878–1890.

[4] А. С. Ланина, Е. А. Плужникова, “Об одной модели электрической активности головного мозга”, *Моделирование и оптимизация сложных систем MOCS-2022*, Тезисы докладов Международной школы молодых ученых (Суздаль, 30 июня – 5 июля), Аркаим, Владимир, 2022, 31–32. [A. S. Lanina, E. A. Pluzhnikova, “On one model of electrical activity of the brain”, *Modeling and Optimization of Complex Systems MOCS-2022*, Abstracts of the International School of Young Scientists (Suzdal, June 30 – July 5), Arkaim Publ., Vladimir, 2022, 31–32 (In Russian)].

[5] C. R. Laing, W. Troy, “Two-bump solutions of Amari-type models of neuronal pattern formation”, *Physica D.*, **178** (2003), 190–218.

[6] M. R. Owen, C. R. Laing, S. Coombes, “Bumps and rings in a two-dimensional neural field: splitting and rotational instabilities”, *New J. Phys.*, **9** (2007), 378.

[7] P. Blomquist, J. Wyller, G. T. Einevoll, “Localized activity patterns in two-population neuronal networks”, *Physica D.*, **206** (2005), 180–212.

[8] A. Oleynik, A. Ponosov, J. Wyller, “On the properties of nonlinear nonlocal operators arising in neural field models”, *J. Math. Anal. Appl.*, **398** (2013), 335–351.

[9] S. Coombes, M. R. Owen, “Evans functions for integral neural field equations with Heaviside firing rate function”, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **4** (2004), 574–600.

[10] Е. О. Бурлаков, М. А. Насонкина, “О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: I. Общая теория”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 17–30. [E. O. Burlakov, M. A. Nasonkina, “On the connection of continuous and discontinuous models of neural fields with microstructure: I. General theory”, *Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 17–30 (In Russian)].

[11] Е. О. Бурлаков, И. Н. Мальков, “О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы»)”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 6–17. [E. O. Burlakov, I. N. Malkov, “On connection of continuous and discontinuous models of neuron fields with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D (“bumps”)”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 6–17 (In Russian)].

[12] Е. С. Жуковский, “Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах”, *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 3–18; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “Volterra inequalities in function spaces”, *Sb. Math.*, **195**:9 (2004), 1235–1251.

[13] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On Ordered-covering mappings and implicit differential inequalities”, *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[14] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, “On absrtact Volterra equations in partially ordered spaces and their applications”, *Mathematical Analysis With Applications*, International Conference in Honor of the 90th Birthday of Constantin Corduneanu. CONCORD-90 (Ekaterinburg, Russia, July 2018), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, **318**, eds. S. Pinelas, A. Kim, V. Vlasov, Springer, Switzerland, 2020, 3–11.

[15] С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:11 (2020), 1471–1482; англ. пер.:S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Functional and differential inequalities and their applications to control problems”, *Differential Equations*, **56**:11 (2020), 1440–1451.

[16] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Физматлит, М., 2019. [A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, 5th ed., Fizmatlit Publ., Moscow, 2019 (In Russian)].

[17] A. V. Arutyunov., E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[18] М. А. Красносельский , П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975. [M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreiko, *Geometric Methods of Nonlinear Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

[19] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982. [L. A. Lyusternik, V. I. Sobolev, *Short Course in Functional Analysis*, High School, Moscow, 1982 (In Russian)].

[20] Е. С. Жуковский, "Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра", *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 33–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "Continuous dependence on parameters of solutions to Volterra's equations", *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1435–1457.

Информация об авторах

Ланина Анастасия Сергеевна, магистрант по направлению подготовки «Математика». Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: lanina.anastasiia5@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8076-5745

Плужникова Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2008-3275

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Плужникова Елена Александровна
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.
Поступила после рецензирования 24.08.2022 г.
Принята к публикации 13.09.2022 г.

Information about the authors

Anastasia S. Lanina, Master's Degree Student in "Mathematics" Programm. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: lanina.anastasiia5@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8076-5745

Elena A. Pluzhnikova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov; Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2008-3275

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Elena A. Pluzhnikova
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Received 14.06.2022
Reviewed 24.08.2022
Accepted for press 13.09.2022